

Simulazione prova scritta di MATEMATICA PER L'ECONOMIA E L'IMPRESA - CORSO AVANZATO

Esercizio 1 (2 + 2 + 4 punti). Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_4, x_1 + 2x_2, -2x_1 - 4x_2, x_1 + 3x_3),$$

1. trovare delle basi per i sottospazi vettoriali $Ker(F)$ e $Im(F)$;
2. detta A la matrice associata all'applicazione F , calcolare la matrice $(A + I_4)^2$;
3. determinare autovalori e autovettori di A e stabilire se è diagonalizzabile.

* * *

Esercizio 2 (10 punti). Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = x\sqrt{y(x)} + y(x) \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

Chiamata $y^*(x)$ la soluzione del problema, tracciarne il grafico nel piano cartesiano.

* * *

Esercizio 3 (6 punti). Trovare il massimo valore assunto dalla funzione $F(x, y) = x^{1/5} \cdot y^{4/5}$ vincolata alla retta $x + 4y = 10$.

* * *

Esercizio 4 (6 punti). Calcolare il seguente integrale doppio sul dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$:

$$\int \int_D (4x + \ln(x^2 + y^2 + 1)) dx dy.$$